LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: HANNACHI SALAH
« **3**$^{\mathbf{EME}}$MATHS »

2015/2016
SERIE D'EXERCICES N5
Rotations du plan

EXERCICE N1:

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit R la rotation de centre B et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Déterminer l'image de C par R.
   b) Soit $E=S_A(D)$. Montrer que E est l'image de D par R.
   c) Soit $F=S_C(D)$. Déterminer l'image de F par R.
2) On désigne par O' le milieu de [BE]. Montrer que OF=O'D et que O est l'orthocentre du triangle DFO' .
3) La droite (OF) coupe (BC) en I et la droite (O'D) coupe (AB) en J.
   Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{JE}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

EXERCICE N2:

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABD rectangle et isocèle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I/ Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

II/ Soit R la rotation d'angle dont une mesure est $\frac{3\pi}{4}$ transformant A en D. Soit Ω son centre.

1) Vérifier que $\Omega \in \Gamma$ puis construire Ω.
2) Soit B'=R(B). Montrer que D∈[BB']
3) Soit D'=R(D). Donner $(\widehat{\overrightarrow{DD'},\overrightarrow{DA}})$ puis montrer que (DD') est tangente à $\mathcal{C}$
4) Soit r la rotation de centre O et d'angle dont une mesure est $(-\frac{\pi}{2})$.
   Soit E un point de [AB] et F un point de [AD] tels que AE=FD.
   Montrer que OEF est un triangle rectangle et isocèle en O.

EXERCICE N3:

Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle et $A'=B*C$, $B'=A*C$ et $C'=A*B$. Soit P l'image de A par la rotation **r** de centre C' et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$ et Q est l'image de A par la rotation **r'** de centre B' et d'angle dont une mesure est $-\frac{\pi}{2}$.

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation **R** qui transforme C' en B' et A' en Q.
      Déterminer une mesure de son angle et construire son centre O.
   b) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{B'A'}})$. En déduire l'image de P par la rotation **R**.
2) a) Montrer que O est le milieu de [PQ].
   b) Montrer que le triangle A'PQ est rectangle et isocèle.

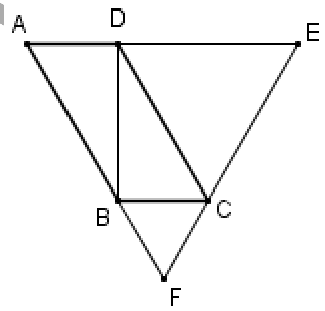
EXERCICE N4:

Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, et soit I le symétrique de B par rapport à (AC).

1) Soit R la rotation d'angle dont une mesure $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C
   a) Montrer que I est le centre de R.
   b) Soit D=R(B). Montrer que C est le milieu de [AD].
2) A tout point M de [AB] distinct de A et de B, on associe le point M' de [CD] tel que AM=CM'. Montrer que le triangle IMM' est équilatéral.

EXERCICE N5:

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un parallélogramme ABCD tel que AB≠AD ; $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.



1) Montrer qu'il existe une unique rotation qui transforme A en E et B en D. Préciser son angle θ et construire son centre I. (On note R cette rotation)
2) La droite (EC) coupe (AB) en F. Sachant que R est d'angle dont une mesure est $-\frac{2\pi}{3}$.
   a) Montrer que D∈ [AE] et que le triangle AFE est équilatéral.
   b) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EA}})$. En déduire que R(F)=A.
3) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB]. Soit M un point variable sur l'arc orienté $AB\backslash\{A,B\}$ et N le point de (MD)\[DM) tel que BM=DN.
   a) Montrer que R(M)=N
   b) En déduire l'ensemble décrit par le point N lorsque M décrit l'arc orienté $AB\backslash\{A,B\}$

EXERCICE N6:

Le plan P étant orienté dans le sens direct. Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ on associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie du plan.
2) Montrer que le point Ω(-2,1) est l'unique point invariant par f.
3) Soit les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ du plan P tels que f(M)=M'.
   a) Exprimer en fonction de x et y les réels $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\det(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})$.
   b) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})$.
   c) Quelle est alors la nature de l'application f.